第 2 节 空间向量的应用：证平行、垂直与求角（★★★）

内容提要

用空间向量求解立体几何问题的步骤比较流程化，常分四步：

①建立空间直角坐标系，写出点的坐标；

②计算直线的方向向量、平面的法向量；

③根据问题，选择合适的公式计算；

④把向量运算的结果翻译成几何问题的答案.

下面归纳一些常见立体几何问题的向量求解方法：

1．证线线平行：如图 1，设 l_1，l_2 是空间中不重合的两条直线，它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，则 $l_1 /\!/ l_2$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$.

2．证线面平行：如图 2，直线 l 不在平面 α 内，直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $l /\!/ \alpha$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

3．证面面平行：如图 3，α，β 是两个不重合的平面，它们的法向量分别为 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$，则 $\alpha /\!/ \beta$ 的充要条件是 $\boldsymbol{n} /\!/ \boldsymbol{m}$.

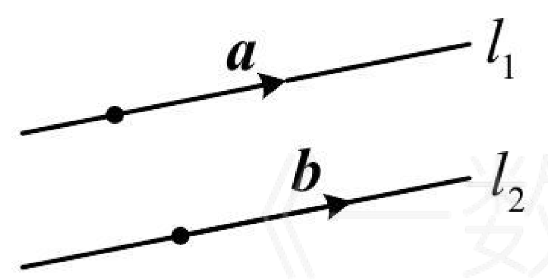


图1

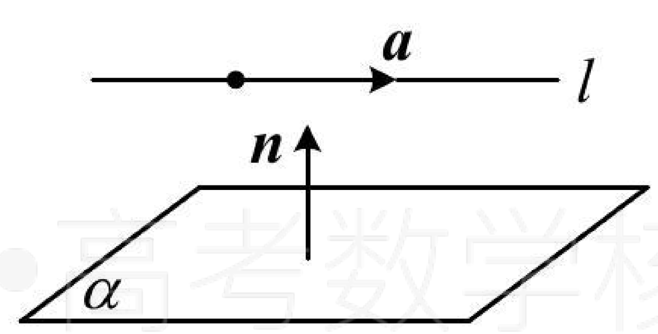


图2

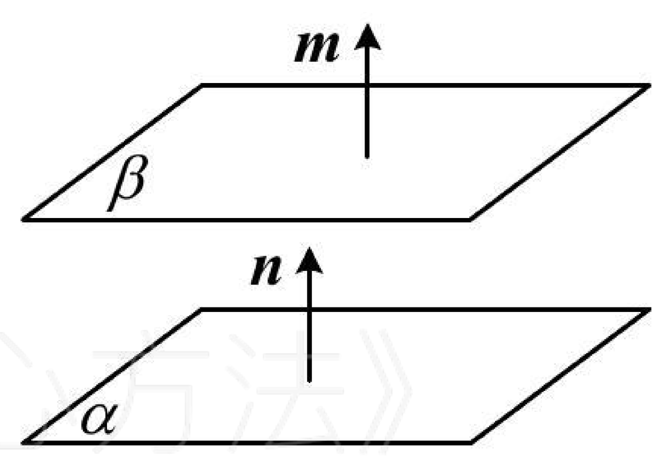


图3

4．证线线垂直：如图 4，设直线 l_1，l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，则 $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

5．证线面垂直：如图 5，设 $\boldsymbol{m}$ 为直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 为平面 α 内两个不共线的向量，则 $l\perp\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{u}=0$ 且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

6．证面面垂直：如图 6，设 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$ 分别为平面 α，β 的法向量，则 $\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

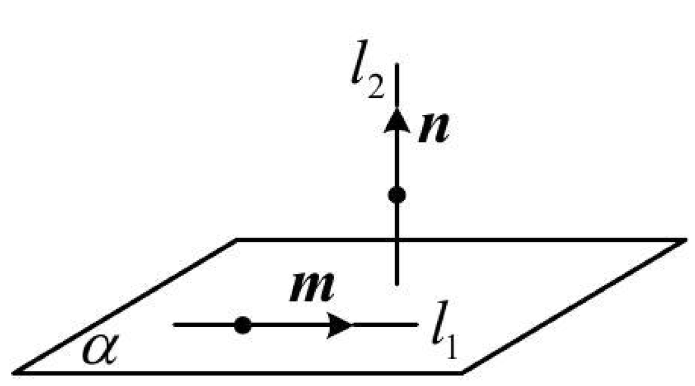


图4

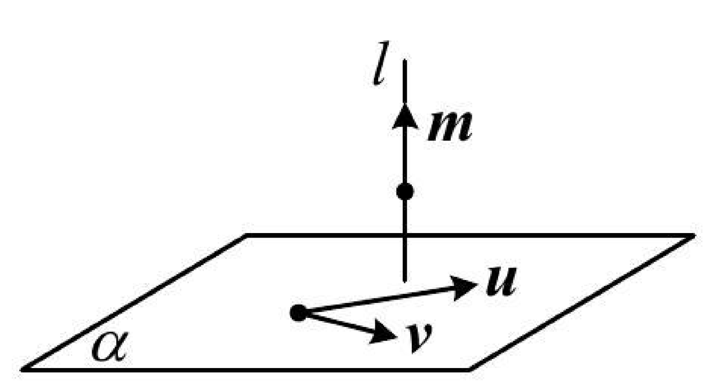


图5

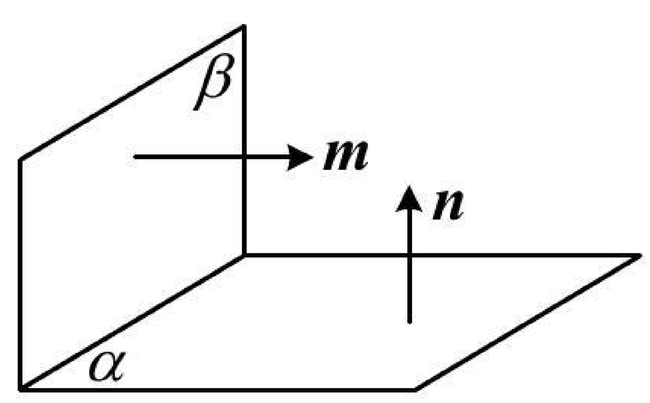


图6

7．求线线角：设 l_1，l_2 是空间的两条直线，它们的夹角为 θ，方向向量分别为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}$.

8．求线面角：如图 7，设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，l 与 α 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$.

9．求二面角：如图 8，设平面 α，β 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的余弦值 $\cos\theta=\pm\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\pm\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$，若是求 $\sin\theta$，可由 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 来算，$\cos\theta$ 取正取负不影响结果；

若是求$\cos\theta$，最终结果取正还是取负，则需考虑二面角的钝锐，一般可通过观察图形，直观想象来判断；若图形不易判断，则求法向量时，让一个朝内，一个朝外，它们的夹角即为二面角，如图 9.

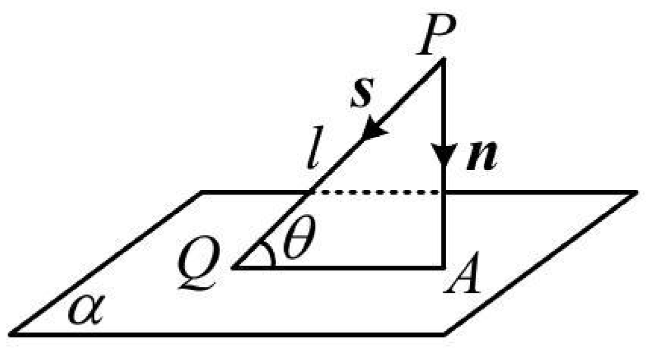


图7

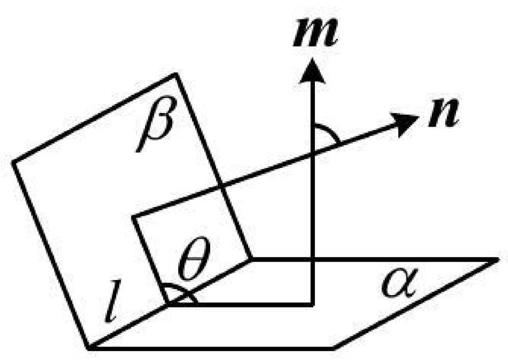


图8

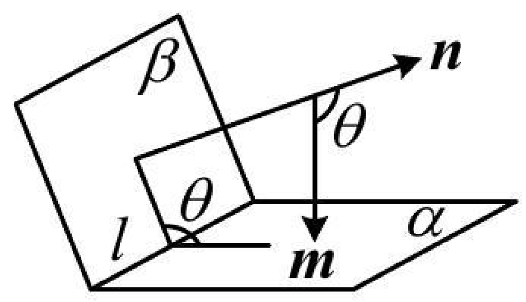


图9

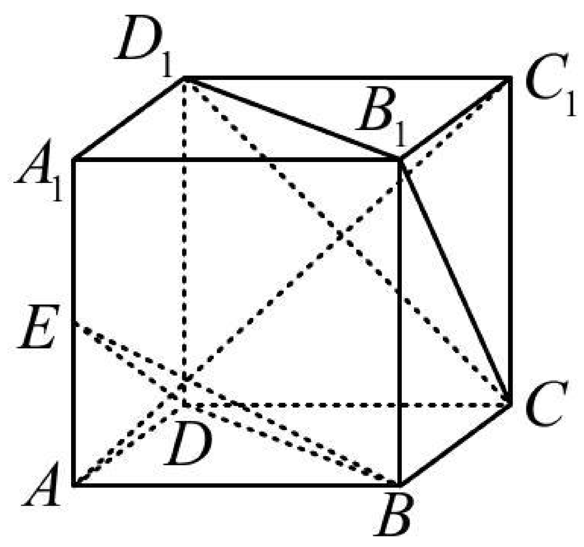
典型例题

类型Ⅰ：用空间向量证平行、垂直

【例 1】（多选）如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为AA_1的中点，则以下四个结论中，正确的有（　　）

（A）DB∥平面CB_1D_1　　（B）平面BDE∥平面CB_1D_1

（C）$AC_1\perp$平面CB_1D_1　　（D）平面$CB_1D_1\perp$平面A_1BC_1



解析：设正方体的棱长为 2，A 项，判断线面是否平行，就看直线的方向向量与平面的法向量是否垂直，

如图，$D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(2,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，所以$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(2,0,2)$，

$\overrightarrow{CD_1}=(0,-2,2)$，设平面$CB_1D_1$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=2x+2z=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD_1}=-2y+2z=0\end{cases}$，

令$x=1$可得$\begin{cases}y=-1\\z=-1\end{cases}$，所以平面$CB_1D_1$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$，

因为$\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}=2\times1+2\times(-1)+0\times(-1)=0$，所以$\overrightarrow{DB}\perp\boldsymbol{n}$，从而$DB$∥平面$CB_1D_1$，故 A 项正确；

B 项，判断面面是否平行，就看它们的法向量是否平行，

由图可知，$E(2,0,1)$，所以$\overrightarrow{DE}=(2,0,1)$，设平面$BDE$的法向量为$\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=2x'+2y'=0\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=2x'+z'=0\end{cases}$，令$x'=1$，则$\begin{cases}y'=-1\\z'=-2\end{cases}$，所以$\boldsymbol{m}=(1,-1,-2)$是平面$BDE$的一个法向量，

观察发现$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{n}$不平行，所以平面BDE与平面CB_1D_1不平行，故 B 项错误；

C 项，判断线面是否垂直，就看直线的方向向量与平面的法向量是否平行，

由图可知，$A(2,0,0)$，$C_1(0,2,2)$，所以$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)=-2\boldsymbol{n}$，故$\overrightarrow{AC_1}$∥$\boldsymbol{n}$，

所以$AC_1\perp$平面CB_1D_1，故 C 项正确；

D 项，判断面面是否垂直，就看两平面的法向量是否垂直，

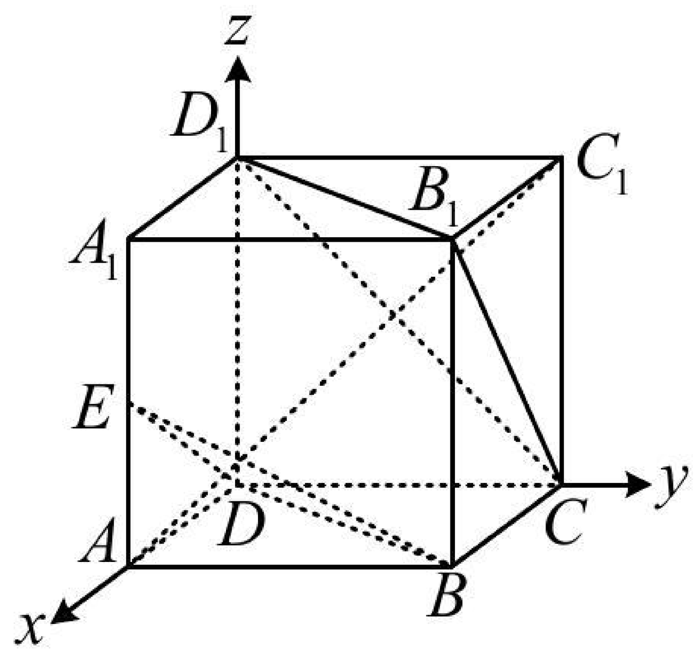
由图可知，$A_1(2,0,2)$，$B(2,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，所以$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$，

设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{p}=(x'',y'',z'')$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{A_1B}=2y''-2z''=0\\ \boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-2x''+2y''=0\end{cases}$，令 $x''=1$，则 $\begin{cases}y''=1\\ z''=1\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{p}=(1,1,1)$ 是平面 A_1BC_1 的一个法向量，因为 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}=1\times1+1\times(-1)+1\times(-1)=-1\neq0$，

所以平面 A_1BC_1 与平面 CB_1D_1 不垂直，故 D 项错误.

答案：AC



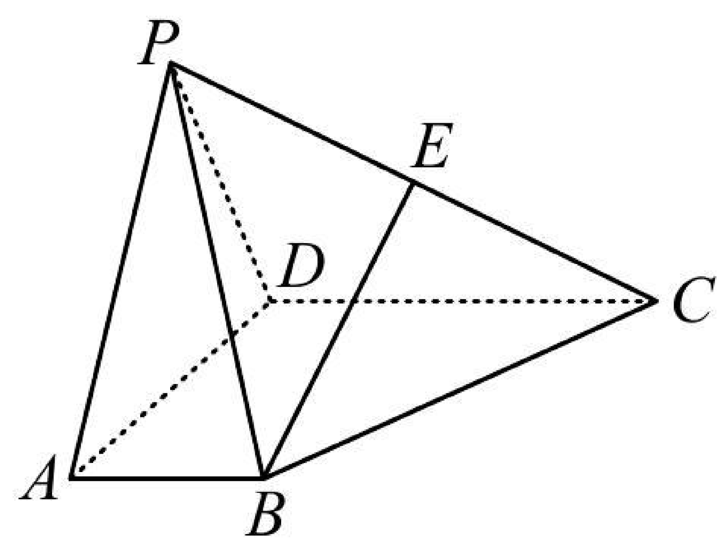
【反思】当图形方便建系时，我们常建立空间直角坐标系，将几何问题转化为向量问题来求解；建系证平行、垂直一般作为想不到几何法时的备选方案，故只举 1 道例题，帮大家熟悉有关问题的向量方法.

类型Ⅱ：用空间向量求线面角

【例 2】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是梯形，$AB /\!/ CD$，$AD\perp CD$，$CD=2AB=4$，ΔPAD 是正三角形，E 是棱 PC 的中点.

（1）证明：$BE /\!/$ 平面 PAD；

（2）若 $AD=2\sqrt{3}$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.



解：(1)（先在面 PAD 内过 A 作 BE 的平行线，作出来就发现构成的图形像平行四边形）

如图，取 PD 中点 F，连接 AF，EF，因为 E 为 PC 的中点，所以 $EF /\!/ CD$ 且 $EF=\dfrac{1}{2}CD$，

又由题意，$AB /\!/ CD$ 且 $CD=2AB$，所以 $AB=\dfrac{1}{2}CD$，故 $EF /\!/ AB$ 且 $EF=AB$，

所以四边形 $ABEF$ 是平行四边形，故 $BE /\!/ AF$，因为 $BE\not\subset$ 平面 PAD，$AF\subset$ 平面 PAD，所以 $BE /\!/$ 平面 PAD.

（2）（条件中有面面垂直，可通过作交线的垂线找到线面垂直，再建系处理）

如图，取 AD 中点 G，连接 PG，因为 ΔPAD 是正三角形，所以 $PG\perp AD$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PG\subset$ 平面 PAD，所以 $PG\perp$ 平面 $ABCD$，

以 G 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，因为 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $PG=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$，

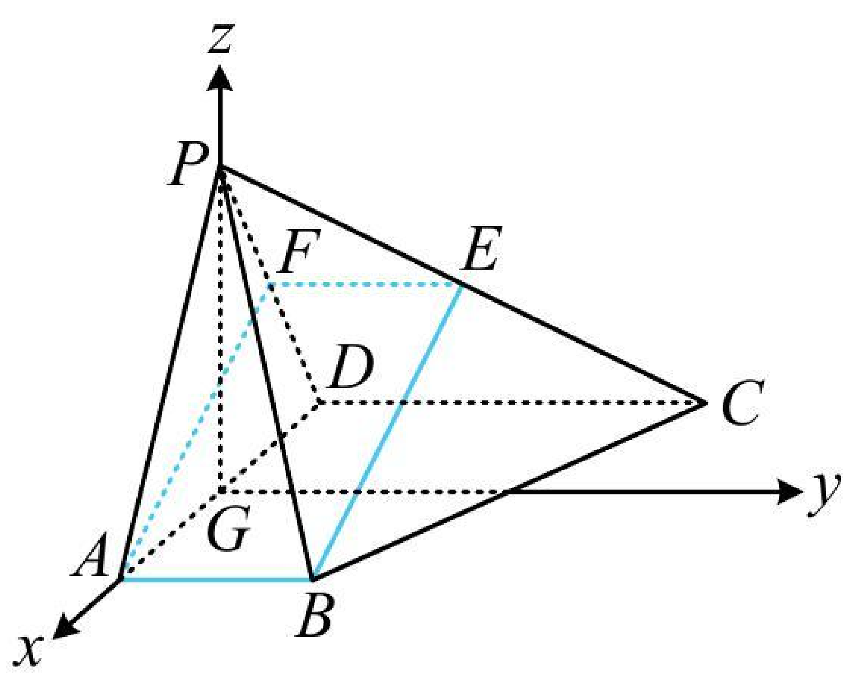
（要算线面角，可代内容提要第 8 点的公式，先求直线的方向向量和平面的法向量）

$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(\sqrt{3},2,0)$，$P(0,0,3)$，$C(-\sqrt{3},4,0)$，所以$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},2,-3)$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{3},2,0)$，

设平面 PBC 的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{3}x+2y-3z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-2\sqrt{3}x+2y=0\end{cases}$，令 $x=1$，则$\begin{cases}y=\sqrt{3}\\ z=\sqrt{3}\end{cases}$，

所以$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$是平面 PBC 的一个法向量，因为$\left|\cos<\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

所以直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



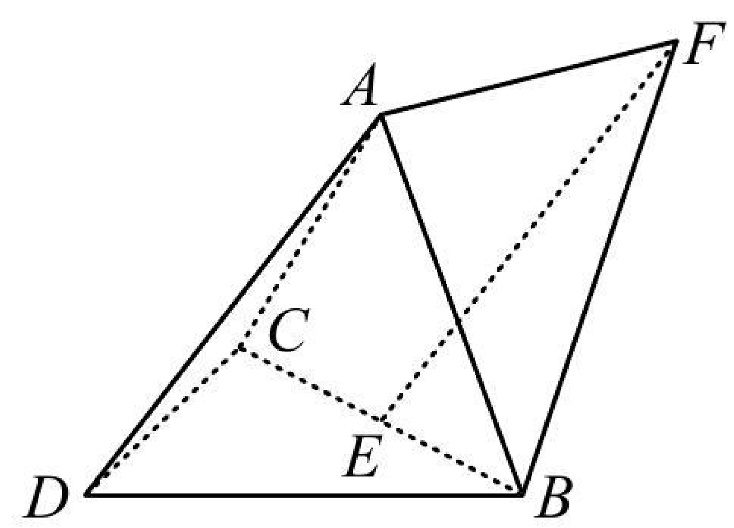
【反思】算线面角θ时，由于$0^\circ\le\theta\le 90^\circ$，所以$\sin\theta\ge 0$，故别忘了在夹角余弦公式上加绝对值.

类型III：用空间向量求二面角

【例 3】(2023 •新高考II卷)如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，$E$ 为 BC 的中点.

（1）证明：$BC\perp DA$；

（2）点 F 满足$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.



解：(1)（BC 和 DA 是异面直线，要证垂直，需找线面垂直，可用逆推法，假设 $BC\perp DA$，注意到条件中还有 $DB=DC$，所以 $BC\perp DE$，二者结合可得到 $BC\perp$面 ADE，故可通过证此线面垂直来证 $BC\perp DA$）

因为 $DA=DB=DC$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，所以$\Delta ADB$和$\Delta ADC$是全等的正三角形，故 $AB=AC$，

又 E 为 BC 中点，所以 $BC\perp AE$，$BC\perp DE$，因为 AE，$DE\subset$平面 ADE，$AE\cap DE=E$，

所以 $BC\perp$平面 ADE，又 $DA\subset$平面 ADE，所以 $BC\perp DA$.

（2）（由图可猜想 EA，EB，ED 两两垂直，若能证出这一结果，就能建系处理，故先尝试证明）

不妨设 $DA=DB=DC=2$，则 $AB=AC=2$，因为 $BD\perp CD$，所以 $BC=\sqrt{DB^2+DC^2}=2\sqrt{2}$，

故 $DE=CE=BE=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{2}$，

所以 $AE^2+DE^2=4=AD^2$，故 $AE\perp DE$，所以 EA，EB，ED 两两垂直，

以 E 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,\sqrt{2})$，$D(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，

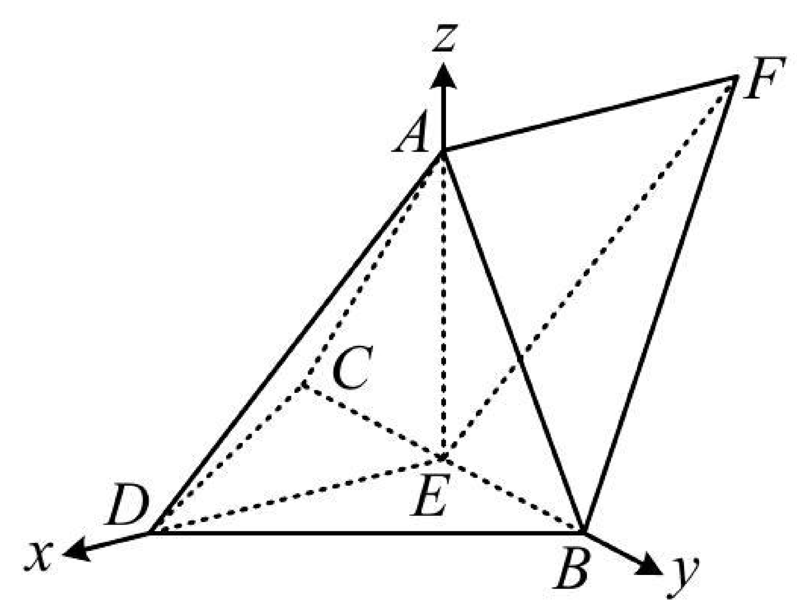
所以 $\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，由 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$ 可知四边形 $ADEF$ 是平行四边形，

所以 $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{ED}=(\sqrt{2},0,0)$，设平面 DAB 和平面 ABF 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，则 $\begin{cases}y_1=1\\ z_1=1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$ 是平面 DAB 的一个法向量，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}y_2-\sqrt{2}z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FA}=\sqrt{2}x_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$，则 $\begin{cases}x_2=0\\ z_2=1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$ 是平面 ABF 的一个法向量，

从而 $|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{6}}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

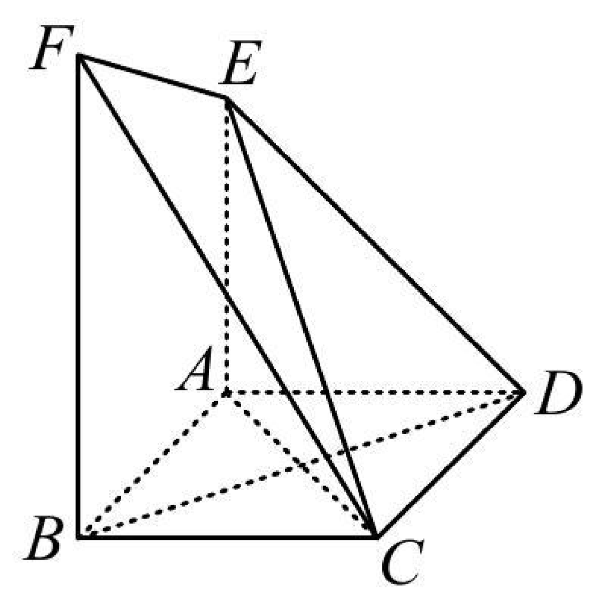


【反思】求二面角的正弦时，无需考虑二面角的钝锐，正弦都为正，故如式①求夹角余弦时加绝对值.

【例 4】如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，$AE\,//\,BF$，$AD=AE=2$，$DE=2\sqrt{2}$.

（1）证明：$BD\perp$ 平面 ACE；

（2）若平面 CEF 与平面 $ABFE$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，求 BF 的长.



解：（1）（证线面垂直，需在面内找线，$BD\perp AC$ 容易看出，而由图可猜想 $AE\perp$ 平面 $ABCD$，故另一条选 AE）

由题意，$AE^2+AD^2=8=DE^2$，所以 $AE\perp AD$，又平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$AE\subset$ 平面 ADE，所以 $AE\perp$ 平面 $ABCD$，因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BD\perp AE$，

又四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$，因为 AE，$AC\subset$ 平面 ACE，$AE\cap AC=A$，所以 $BD\perp$ 平面 ACE.

（2）（第 1 问已证出了 $AE\perp$ 平面 $ABCD$，第 2 问可直接建系）取 CD 中点 G，连接 AG，

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，所以 ΔABC 和 ΔACD 都是正三角形，

故 $AG\perp CD$，又 $AB\,//\,CD$，所以 $AG\perp AB$，结合 $AE\perp$ 平面 $ABCD$ 可得 AE，AB，AG 两两垂直，

以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，设 $BF=a(a>0)$，则 $C(1,\sqrt{3},0)$， $E(0,0,2)$， $F(2,0,a)$，

所以 $\overrightarrow{CE}=(-1,-\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{CF}=(1,-\sqrt{3},a)$，设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-x-\sqrt{3}y+2z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=x-\sqrt{3}y+az=0\end{cases}$，两式相减得： $-2x+(2-a)z=0$，

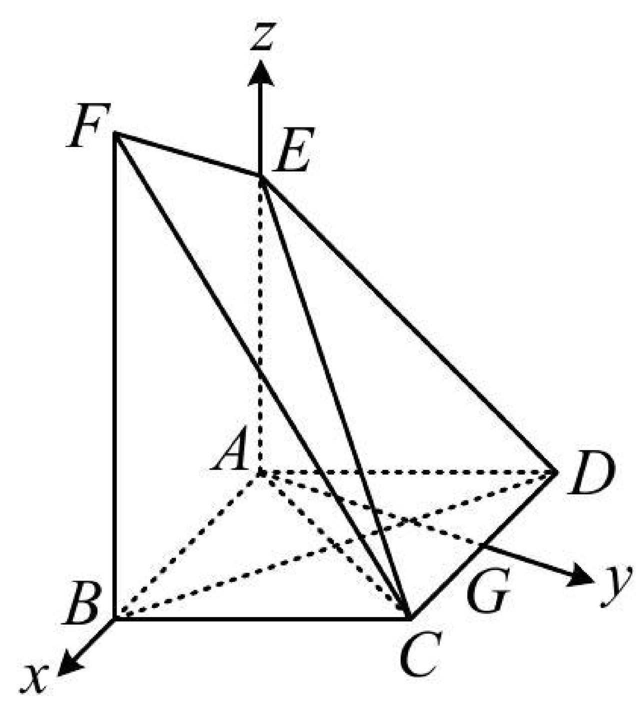
令 $x=2-a$，则 $z=2$，代入原方程组可得 $y=\dfrac{2+a}{\sqrt{3}}$，

（为了便于后续计算，我们把求得的 x，y，z 同乘以 $\sqrt{3}$ 去分母）

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}(2-a),2+a,2\sqrt{3})$ 是平面 CEF 的一个法向量，由图可知 $AG\perp$ 平面 $ABFE$，

所以 $\overrightarrow{AG}=(0,\sqrt{3},0)$ 是平面 $ABFE$ 的一个法向量，因为平面 CEF 与平面 $ABFE$ 的夹角余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

所以 $\left|\cos<\overrightarrow{AG},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AG}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}(2+a)}{\sqrt{3(2-a)^2+(2+a)^2+12}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，解得： $a=3$，故 $BF=3$.

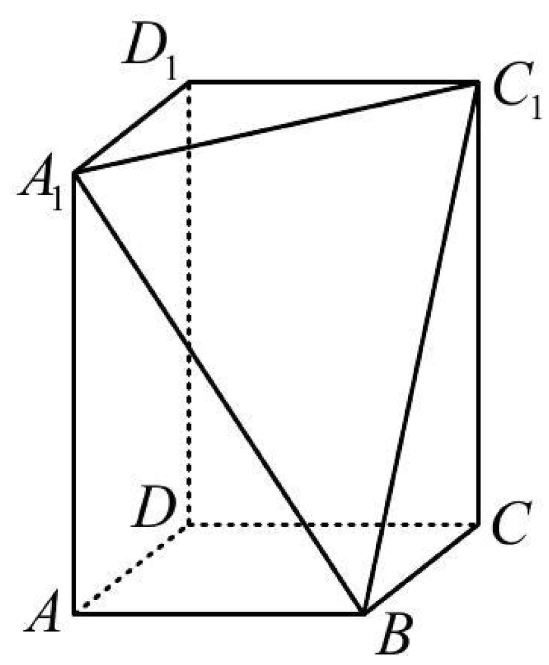


【反思】两个平面（不考虑平行和垂直的情况）的夹角一定是锐角，所以计算面面的夹角余弦，直接在法向量的夹角余弦上取绝对值.

【变式】在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2$，过 A_1， C_1，B 三点的平面截去长方体的一个角后，得到如图所示的几何体 $ABCD-A_1C_1D_1$，且这个几何体的体积为 10.

（1）求棱 AA_1 的长；

（2）求二面角 A_1-BC_1-C 的余弦值.



解：（1）（条件中有几何体的体积，直接算该体积较麻烦，可补全为长方体，再减截去部分的体积）

设 $AA_1=a$，将所给图形补全为原长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 如图，

由图可知，截去部分的体积 $V_{B-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta A_1B_1C_1}\cdot BB_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times a=\dfrac{2a}{3}$，

长方体的体积$V=2\times 2\times a=4a$，由题意，$4a-\dfrac{2a}{3}=10$，解得：$a=3$，所以$AA_1=3$.

（2）以D为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则$A_1(2,0,3)$，$B(2,2,0)$，$C_1(0,2,3)$，

所以$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-3)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$，设平面$A_1BC_1$的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=2y-3z=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-2x+2y=0\end{cases}$，令$x=3$，则$\begin{cases}y=3\\ z=2\end{cases}$，所以$\boldsymbol{m}=(3,3,2)$是平面$A_1BC_1$的一个法向量，

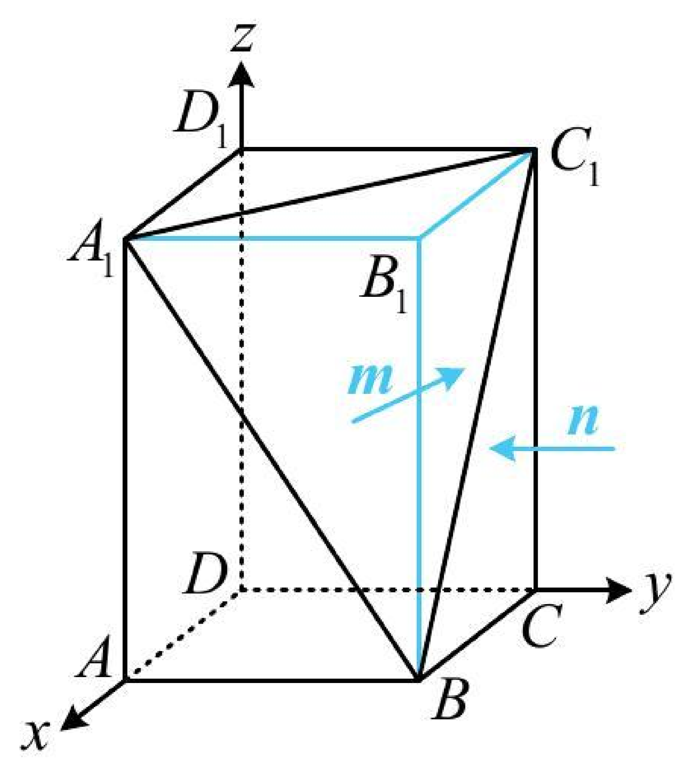
（若想象不出二面角A_1-BC_1-C的钝锐，那么取法向量时让一个朝内，一个朝外，如图，$\boldsymbol{m}$ 是朝外的，于是接下来取$\boldsymbol{n}$时，应使其朝内）

由图可知，$\boldsymbol{n}=(0,-1,0)$是平面BC_1C的一个法向量，

所以$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\times 0+3\times(-1)+2\times 0}{\sqrt{3^2+3^2+2^2}\times 1}=-\dfrac{3\sqrt{22}}{22}$，

（尽管我们是通过设置法向量的指向直接求出二面角的余弦，但作答时，我们还是写“由图可知…”）

由图可知二面角A_1-BC_1-C为钝角，故其余弦值为$-\dfrac{3\sqrt{22}}{22}$.



【反思】若看图不易得出二面角的钝锐，可将法向量取成一个朝内，一个朝外，它们的夹角即为二面角.

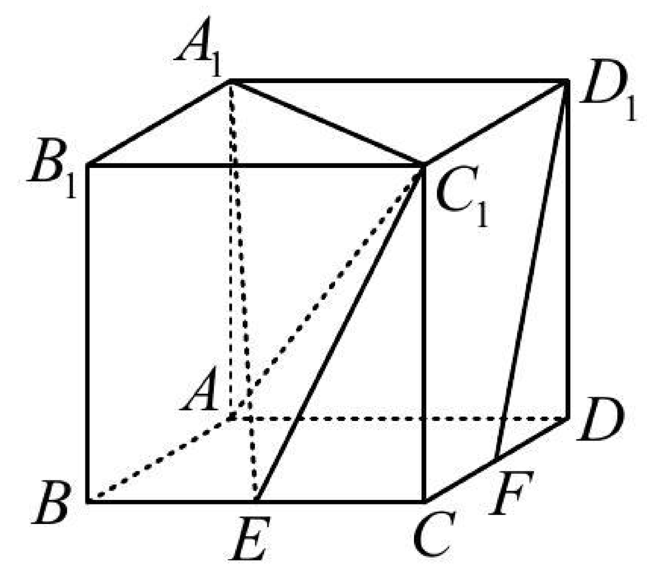
强化训练

1．（2021·天津卷·★★）如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为棱BC，CD的中点.

（1）求证：D_1F // 平面A_1EC_1；

（2）求直线AC_1与平面A_1EC_1所成角的正弦值；

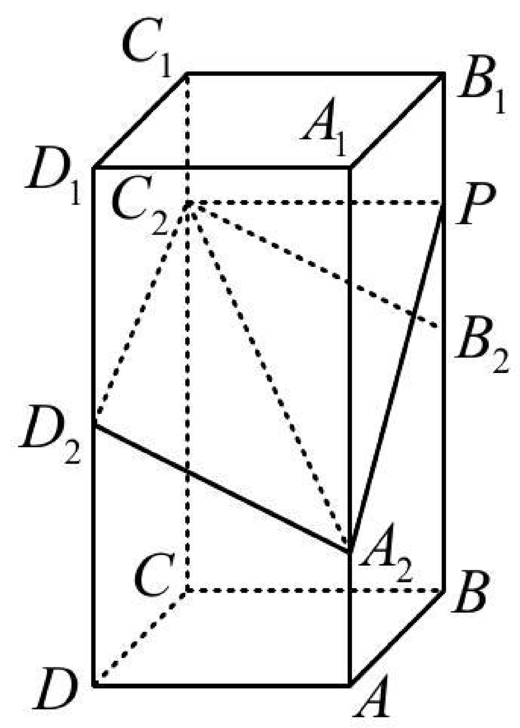
（3）求二面角$A-A_1C_1-E$的正弦值.



2．（2023 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★）如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$．点 A_2，B_2，C_2，D_2 分别在棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$.

（1）证明：$B_2C_2 \parallel A_2D_2$；

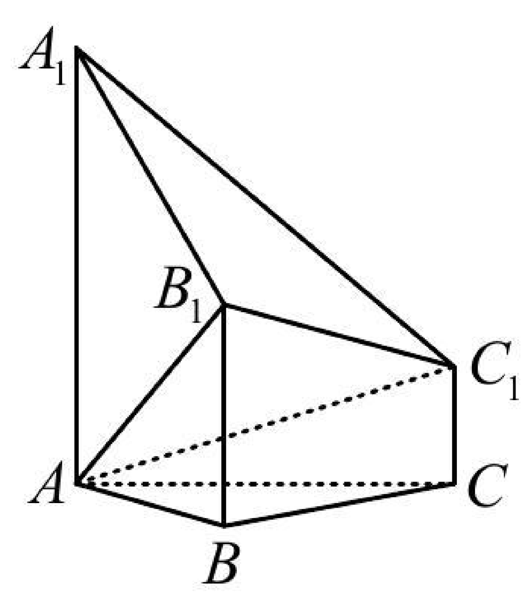
（2）点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时，求 B_2P.



3．（2018 •浙江 •★★★）如图，已知多面体 $ABCA_1B_1C_1$，A_1A，B_1B，C_1C 均垂直于平面 ABC，$\angle ABC=120^{\circ}$，$A_1A=4$，$C_1C=1$，$AB=BC=B_1B=2$.

（1）证明：$AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；

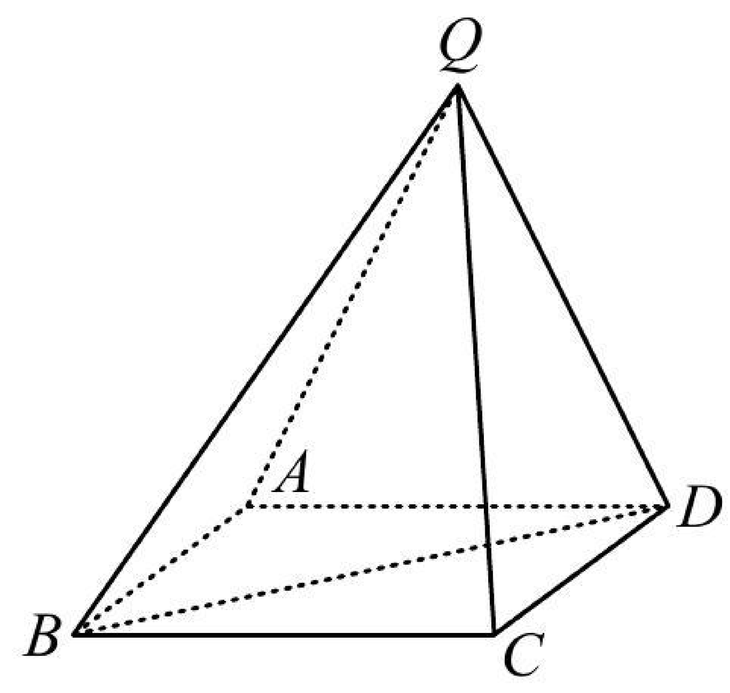
（2）求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值.



4．（2021·新高考Ⅱ卷·★★★）在四棱锥$Q-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，$AD=2$，$QD=QA=\sqrt{5}$，$QC=3$.

（1）证明：平面$QAD\perp$平面$ABCD$；

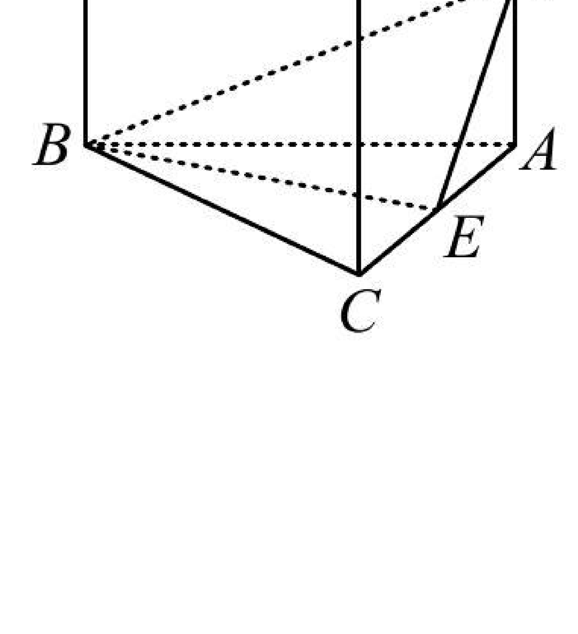
（2）求二面角$B-QD-A$的平面角的余弦值.



5．（2023·山东模拟·★★★）如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，E，F分别是线段AC，AA_1的中点，$\angle BCA=\angle BAC$.

（1）求证：平面$BEF\perp$平面ACC_1A_1；

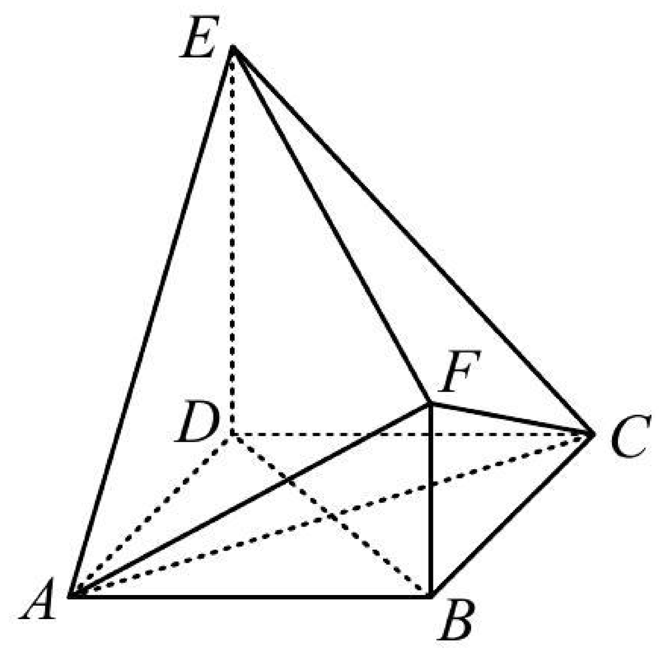
（2）若$\cos\angle ACB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，且二面角$A-BF-E$的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，求$\dfrac{AA_1}{AC}$的值.



6.（2023 •四川成都石室中学模拟 •★★★）如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=60^{\circ}$，$ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB\,//\,ED$，$BD=ED=2FB$.

（1）求证：平面 $BDEF\perp$ 平面 AFC；

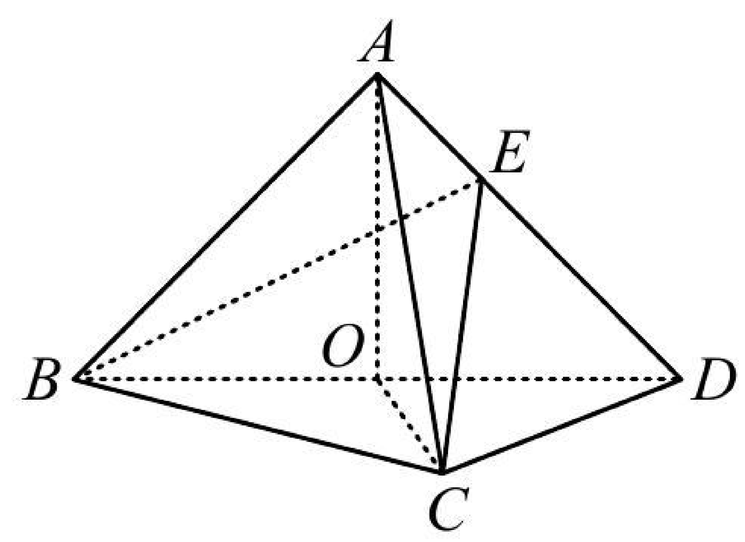
（2）求二面角 $A-EF-C$ 的余弦值.



7.（2021 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★）如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$AB=AD$，O 为 BD 的中点.

（1）证明：$OA\perp CD$；

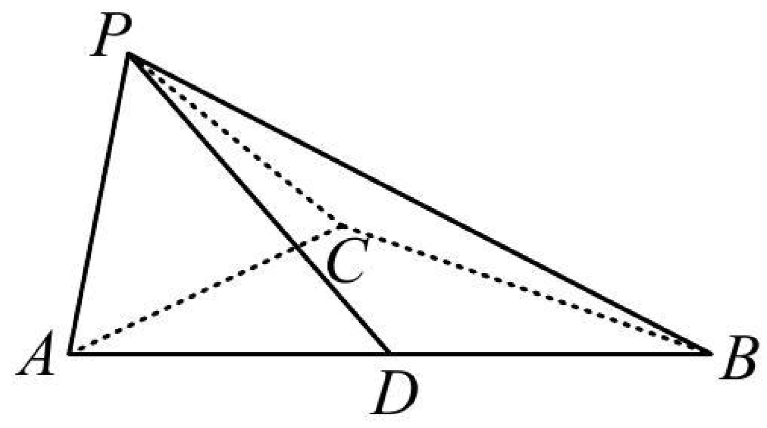
（2）若 ΔOCD 是边长为 1 的等边三角形，点 E 在棱 AD 上，$DE=2EA$，且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45°，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.



8．（2023 • 浙江杭州模拟 • ★★★★）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，ΔPAC 是正三角形，$AC \perp BC$，$AC=BC=2$，D 是 AB 的中点.

（1）证明：$AC \perp PD$；

（2）若二面角 $P-AC-D$ 为150°，求直线 BC 与平面 PAB 所成角的正弦值.



9．（2023 • 四省联考 • ★★★★）如图，四边形 $ABCD$ 是圆柱底面的内接四边形，AC 是圆柱的底面直径，PC 是圆柱的母线，E 是 AC 与 BD 的交点，$AB=AD$，$\angle BAD=60^{\circ}$.

（1）记圆柱的体积为V_1，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为V_2，求$\dfrac{V_1}{V_2}$；

（2）设点 F 在线段 AP 上，且 $PA=4PF$，$PC=4CE$，求二面角 $F-CD-P$ 的余弦值.